

УДК 512.548

ЦИКЛИЧЕСКИЕ n -АРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

А.М. Гальмак¹, Н.А. Щучкин²

¹Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

²Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

CYCLIC n -ARY GROUPS AND THEIR GENERALIZATIONS

A.M. Gal'mak¹, N.A. Shchuchkin²

¹Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

²Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, Russia

Для любого делителя $m - 1$ натурального числа $n - 1$ определяются и изучаются m -полуциклические n -арные группы. Класс всех m -полуциклических n -арных групп входит в класс всех m -полуабелевых n -арных групп, которые были определены Э. Постом. Кроме того, класс всех m -полуциклических n -арных групп включает в себя класс всех циклических n -арных групп и входит в класс всех полуциклических n -арных групп. Установлены новый критерий циклическости n -арной группы и критерий m -полуциклическости n -арной группы, сформулированные с помощью одной из подгрупп универсальной обертывающей группы Поста.

Ключевые слова: n -арная группа, циклическая группа, полуциклическая группа, m -полуциклическая группа.

The authors define and study m -semicyclic n -ary groups for any divisor $m - 1$ of natural number $n - 1$. The class of all m -semicyclic n -ary groups is included in the class of all m -semiabelian n -ary groups identified by E. Post. Moreover, the class of all m -semicyclic n -ary groups includes the class of all cyclic n -ary groups and belongs to the class of all semicyclic n -ary groups. New criteria of cyclicity for n -ary group and for m -semicyclicity of n -ary group formulated by one of the subgroups of the universal covering group of Post are determined.

Keywords: n -ary group, cyclic group, semicyclic group, m -semicyclic group.

Введение

Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A , θ_A – отношение эквивалентности Поста [1], определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что θ_A – конгруэнция на полугруппе F_A , а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой.

Для всякого $i = 1, \dots, n - 1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha) \in A^*, l(\alpha) = i\},$$

где $\theta_A(\alpha)$ – класс конгруэнции θ_A , содержащий последовательность α ; $l(\alpha)$ – длина последовательности α . В частности,

$$A' = \{\theta_A(a) \mid a \in A\},$$

$$A'' = \{\theta_A(ab) \mid a, b \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распространенным в литературе по n -арным группам символом A_0 , то есть $A_0 = A^{(n-1)}$.

Справедливы равенства (см., например, [2, предложение 1.3.7])

$$A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)},$$

$$A^{(i)} \cap A^{(j)} = \emptyset, i, j \in \{1, \dots, n - 1\}, i \neq j.$$

Если зафиксировать $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ и элементы $a_1, \dots, a_{n-i} \in A$, то несложно убедиться в справедливости ещё одного равенства

$$A' = A^{(i)}\theta_A(a_1 \dots a_{n-i}). \quad (0.1)$$

Замечание 0.1. Если $n = k(m - 1) + 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k + 1)$ -арной группой относительно $(k + 1)$ -арной операции

$$[\theta_A(\alpha_1)\theta_A(\alpha_2) \dots \theta_A(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta_A(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1} \in A^{(m-1)}.$$

Если $m = 2$, то $k = n - 1$ и получаем n -арную операцию

$$[\theta_A(a_1)\theta_A(a_2) \dots \theta_A(a_n)]_n = \theta_A(a_1a_2 \dots a_n) = \theta_A([a_1a_2 \dots a_n]), a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

При этом, как несложно установить, отображение $\varphi: a \rightarrow \theta_A(a)$ является изоморфизмом n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ на n -арную группу $\langle A', []_n \rangle$.

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$[\theta_A(a_1a_2 \dots a_{n-1})\theta_A(b_1b_2 \dots b_{n-1})]_2 = \theta_A(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-1}) = \theta_A([a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1]b_2 \dots b_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in A$. При этом группу $\langle A^{(n-1)} = A_0, []_2 \rangle$ называют *соответствующей группой* для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и

для сокращения записей обозначают одним символом A_0 .

Если $m - 1$ делит $n - 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то положим

$${}^m A = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) \text{ кратно } m - 1\}.$$

При $m = 2$ множество ${}^m A$ совпадает с универсальной обертывающей группой Поста A^* , а при $m = n$ множество ${}^m A$ совпадает с соответствующей группой A_0 :

$${}^2 A = A^*, {}^n A = A_0.$$

1 Обобщение теоремы Поста о смежных классах

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Поста о смежных классах.

Теорема 1.1 [3]. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$. Тогда:

- 1) $A_0 \subseteq {}^m A \subseteq A^*$;
- 2) ${}^m A = \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}$;
- 3) ${}^m A$ – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа ${}^m A$ порождается множеством $A^{(m-1)}$;
- 5) ${}^m A / A_0 = \{A^{(m-1)}, A^{(2(m-1))}, \dots, A^{(k(m-1))} = A_0\}$ – циклическая группа порядка k , порождаемая элементом $A^{(m-1)}$;

6) $A^* / {}^m A$ – циклическая группа порядка $m - 1$.

Так как $A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \emptyset$ при $i \neq j$, то из 2) предыдущей теоремы вытекает

Следствие 1.1. Если $n = k(m - 1) + 1$, $\langle A, [] \rangle$ – конечная n -арная группа порядка γ , то порядок группы ${}^m A$ равен $k\gamma$.

Замечание 1.1. Если в теореме 1.1 положить $m = 2$, то тогда $k = n - 1$, ${}^m A = A^*$, а утверждения

1) – 6) примут следующий вид:

- 1) $A_0 \subseteq A^*$;
- 2) $A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)}$;
- 3) A^* – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа A^* порождается множеством A' ;
- 5) $A^* / A_0 = \{A', A'', \dots, A^{(n-1)} = A_0\}$ – циклическая группа порядка $n - 1$, порождаемая элементом A' ;

6) A^* / A^* – циклическая группа порядка 1.

Утверждения 3 и 6 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах ([1], [2, теорема 1.3.2]).

Замечание 1.2. Если в теореме 1.1 положить $m = n$, то тогда $k = 1$, ${}^m A = A_0$, а утверждения 1) – 6) примут следующий вид:

- 1) $A_0 \subseteq A^*$;
- 2) $A_0 = A_0$;
- 3) A_0 – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа A_0 порождается множеством A_0 ;
- 5) A_0 / A_0 – циклическая группа порядка 1;
- 6) A^* / A_0 – циклическая группа порядка $n - 1$.

Утверждения 2, 4 и 5 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах.

Таким образом, теорема 1.1 является обобщением теоремы Поста о смежных классах. При этом утверждение последней о том, что A^* / A_0 – циклическая группа порядка $n - 1$, может быть получено из теоремы 1.1 двояко: из утверждения 5) при $m = 2$; из утверждения 6) при $m = n$. Вообще говоря, указанное обобщение является формальным, так как утверждения теоремы 1.1 могут быть извлечены из теоремы Поста о смежных классах. Например, циклическость группы ${}^m A / A_0$ вытекает из того, что ${}^m A / A_0$ – подгруппа циклической группы A^* / A_0 ; а циклическость группы $A^* / {}^m A$ вытекает из циклическости группы A^* / A_0 и изоморфизма

$$(A^* / A_0) / ({}^m A / A_0) \cong A^* / {}^m A.$$

Используя утверждения 3) и 4) предложения 1.3.7 [2], несложно получить разложения групп A^* и ${}^m A$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^m A$ и A_0 соответственно.

Предложение 1.1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$, $b \in A$. Тогда:

$$1) A^* = {}^m A + \theta_A(b) {}^m A + \theta_A^2(b) {}^m A + \dots$$

$$\dots + \theta_A^{m-2}(b) {}^m A =$$

$$= {}^m A + {}^m A \theta_A(b) + {}^m A \theta_A^2(b) + \dots + {}^m A \theta_A^{m-2}(b);$$

$$2) {}^m A = A_0 + \theta_A(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 +$$

$$+ \theta_A^2(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 + \dots + \theta_A^{k-1}(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 =$$

$$= A_0 + A_0 \theta_A(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) + A_0 \theta_A^2(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) + \dots$$

$$\dots + A_0 \theta_A^{k-1}(\underbrace{b \dots b}_{m-1}).$$

Известное разложение Поста ([1], [2, предложение 1.4.6])

$$A^* = A_0 + \theta_A(b) A_0 + \theta_A^2(b) A_0 + \dots + \theta_A^{n-2}(b) A_0 =$$

$$= A_0 + A_0 \theta_A(b) + A_0 \theta_A^2(b) + \dots + A_0 \theta_A^{n-2}(b)$$

может быть получено либо из 1) предыдущего предложения при $m = n$, либо из 2) этого же предложения при $m = 2$.

Замечание 1.3. Если $n = k(m - 1) + 1$, то несложно установить, что

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} u^{i-1} = u^{i-1} A^{(m-1)}$$

для любого $u \in A^{(m-1)}$, $i = 1, \dots, k$.

Согласно Э. Посту [1], группа G называется обертывающей для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, если:

1) группа G порождается множеством A ;

2) для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ бинарная и n -арная операции связаны равенством

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Любая обертывающая группа G n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ является гомоморфным образом универсальной обертывающей группы Поста A^* ([1], [2, теорема 1.4.9]).

Замечание 1.4. Из утверждения 4) теоремы 1.1 и определения $(k+1)$ -арной операции $[]_{k+1}$ следует, что группа ${}^m A$ является обертывающей для $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Более того, группа ${}^m A$ изоморфна универсальной обертывающей группе Поста $(A^{(m-1)})^*$ для $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$.

Группа A^* из теоремы Поста о смежных классах и её подгруппа A_0 используются при изучении n -арных групп. Яркими примерами эффективного использования этих групп являются описание В.А. Артамоновым свободных n -арных групп [4] и шрайеровых многообразий n -арных групп [5], а также разработанная Э. Постом [1] и С.А. Русаковым [6] силовская теория n -арных групп. В следующих разделах будет показано, что при изучении n -арных групп с успехом может быть использована и группа ${}^m A$, частными случаями которой, как отмечалось в конце введения, являются как сама группа A^* , так и её подгруппа A_0 .

2 Критерий m -полуабелевости n -арной группы

Напомним, что n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется абелевой [7], если в ней для любой подстановки σ множества $\{1, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}].$$

n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется полуабелевой [7], если в ней выполняется тождество

$$[aa_2 \dots a_{n-2} b] = [ba_2 \dots a_{n-2} a].$$

Э. Пост объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав [1] n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ m -полуабелевой, если $m-1$ делит $n-1$ и

$$(aa_2 \dots a_{m-2} b, ba_2 \dots a_{m-2} a) \in \theta_A$$

для всех $a, a_2, \dots, a_{m-2}, b \in A$.

Имеет место следующий критерий m -полуабелевости n -арной группы.

Теорема 2.1 [3]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является m -полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^m A$ абелева.

Полагая в теореме 2.1 $m=2$, получим

Следствие 2.1 [1]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста A^* абелева.

Полагая в теореме 2.1 $m=n$, получим

Следствие 2.2 [1]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда её соответствующая группа A_0 абелева.

При доказательстве теоремы 2.1 используется следующая лемма.

Лемма 2.1. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является m -полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{m-1} \in A$ последовательности

$$a_1 \dots a_{m-1} b_1 \dots b_{m-1} \text{ и } b_1 \dots b_{m-1} a_1 \dots a_{m-1}$$

эквивалентны.

Замечание 2.1. Если $n = k(m-1) + 1$, то непосредственным следствием леммы 2.1 является равносильность m -полуабелевости n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и абелевости $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ из замечания 0.1.

3 Циклические и полуциклические n -арные группы

Вначале напомним определения полиадической степени и циклической n -арной группы.

Для любого целого s и любого элемента a n -арной ($n \geq 3$) группы $\langle A, [] \rangle$ s -ая n -адическая степень $a^{[s]}$ этого элемента определяется следующим образом [1]:

$$a^{[s]} = a, \text{ если } s = 0;$$

$$a^{[s]} = [\underbrace{a \dots a}_{s(n-1)+1}], \text{ если } s > 0;$$

$a^{[s]}$ – решение уравнения $[x \underbrace{a \dots a}_{s(n-1)}] = a$, если $s < 0$.

Заметим, что использовать квадратные скобки в обозначении полиадической степени предложил Э. Пост. Эти скобки не связаны с символом n -арной операции.

n -Арную группу $\langle A, [] \rangle$, порождённую одноэлементным множеством $\{a\}$, называют циклической n -арной группой, порождённой элементом a [1]. Сам элемент a в этом случае называется порождающим.

Циклическая n -арная группа, порождённая элементом a , состоит из всех полиадических степеней этого элемента. Если $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ , то

$$A = \{a^{[0]}, a^{[1]}, a^{[2]}, \dots, a^{[\gamma-1]}\}.$$

Если же $\langle A, [] \rangle$ – бесконечная, то

$$A = \{a^{[s]} \mid s - \text{целое}\}.$$

Более подробную информацию о циклических n -арных группах можно найти в [1], [2]. Здесь же мы сформулируем и докажем новый критерий циклическости n -арной группы.

Лемма 3.1. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, у которой группа ${}^m A$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, где $a_1, \dots, a_{m-1} \in A$. Тогда для любого $i = 1, \dots, k$ верно:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ , то

$$A^{(i(m-1))} = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1 \};$$

2) если $\langle A, [] \rangle$ – бесконечная, то

$$A^{(i(m-1))} = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r - \text{целое} \}.$$

Доказательство. 1) Положим

$$V_i = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1 \}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \bigcup_{i=1}^k \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma - 1 \} =$$

$$= \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid i = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, \gamma - 1 \} =$$

$$= \{ \theta_A^s(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, \gamma k \},$$

то есть

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \{ \theta_A^s(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, \gamma k \}.$$

А так как циклическая группа ${}^m A$ порождается элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ и имеет порядок γk , то из последнего равенства следует, что $\bigcup_{i=1}^k V_i = {}^m A$, откуда и из утверждения 2) теоремы 1.1 следует

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}, \quad (3.1)$$

где для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ верно

$$A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \emptyset. \quad (3.2)$$

Так как

$$\theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_A \underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i},$$

а длина последовательности $\underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i}$

равна

$$(rk+i)(m-1) = rk(m-1) + i(m-1) = r(n-1) + i(m-1),$$

то

$$V_i \subseteq A^{(i(m-1))}. \quad (3.3)$$

Предположим, что $V_i \neq A^{(i(m-1))}$, то есть существует элемент $u \in A^{(i(m-1))}$ такой, что $u \notin V_i$.

Тогда $u \in \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}$, а из (3.2) и (3.3) вытекает

$u \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$, что противоречит (3.1). Таким образом, $A^{(i(m-1))} = V_i$, то есть верно равенство из 1).

2) Доказательство проводится аналогично с заменой условия $r=0, 1, \dots, \gamma-1$ условием r – целое. Лемма доказана.

Лемма 3.2 [2]. Для любого элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и любого целого s справедливо равенство $\theta_A(a^{[s]}) = (\theta_A(a))^{s(n-1)+1}$.

Теперь мы можем сформулировать новый критерий циклическости n -арной группы.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – циклическая, порождённая элементом a , то для любого t такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$;

2) если для некоторого t такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$, то $\langle A, [] \rangle$ – циклическая n -арная группа, порождённая элементом a .

Доказательство. Сразу же заметим, что n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ и группа ${}^m A$ конечны или бесконечны одновременно.

1) Так как $A = \{a^{[r]} \mid r \in Z\}$, то, ввиду предложения 1.3.7 [2],

$$\begin{aligned} A^{(i(m-1))} &= \{ \theta_A(a^{[r]}) \underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ \theta_A(a^{[r]}) \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z \}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая лемму 3.2 и равенство $n = k(m-1) + 1$, имеем

$$\begin{aligned} A^{(i(m-1))} &= \{ (\theta_A(a))^{r(n-1)+1} (\theta_A(a))^{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{rk(m-1)+1} (\theta_A(a))^{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(rk+i)(m-1)} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ ((\theta_A(a))^{m-1})^{rk+i} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \}, \end{aligned}$$

то есть

$$A^{(i(m-1))} = \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \}.$$

Тогда по теореме 1.1

$$\begin{aligned} {}^m A &= \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \bigcup_{i=1}^k \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid i = 1, \dots, k, r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^s \mid s \in Z \}, \end{aligned}$$

то есть ${}^m A = \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^s \mid s \in Z \}$. Следовательно, ${}^m A$ – циклическая группа, порождённая элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$.

2) По лемме 3.1

$$A^{(m-1)} = \{ \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) \mid r - \text{целое} \}.$$

Тогда, используя равенство (0.1) при $i = m-1$, $a_1, \dots, a_{n-m+1} = a$, а также лемму 3.2, получим

$$\begin{aligned} A' &= A^{(m-1)} \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) = \\ &= \{ \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{n-m+1}) \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1} \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{(k-1)(m-1)+1}) \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1} (\theta_A(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(r+1)k(m-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(r+1)(n-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a^{[r+1]})) \mid r - \text{целое} \}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A' = \{ (\theta_A(a^{[s]})) \mid s - \text{целое} \}.$$

А так как $A' = \{ \theta_A(b) \mid b \in A \}$, то $A = \{ a^{[s]} \mid s - \text{целое} \}$. Следовательно, $\langle A, [] \rangle$ – циклическая n -арная группа, порождённая элементом a . Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1 $m = 2$, получим
Следствие 3.1 ([1], [2], теорема 2.5.22)]. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста A^* – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(a)$.

Напомним, что *n*-арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется *полуциклической* [2], если её соответствующая группа A_0 циклическая. Так как для всякой *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$ мощности множеств A и A_0 совпадают, то любая *n*-арная группа простого порядка является *полуциклической*. Подробному изучению *полуциклических n*-арных групп посвящена статья [8].

Полагая в теореме 3.1 $m = n$, получим
Следствие 3.2 [2, теорема 2.5.23]. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда её соответствующая группа A_0 – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{n-1})$.

Сформулируем ещё одно следствие из теоремы 3.1.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – *n*-арная группа. Если для некоторого элемента $a \in A$ и некоторого t такого, что $n = k(m - 1) + 1$, группа ${}^m A$ порождается элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$, то универсальная обертывающая группа Поста A^* порождается элементом $\theta_A(a)$.

4 *t*-Полуциклические *n*-арные группы

Как уже отмечалось, подгруппа ${}^m A$ группы A^* , как и её частные случаи – сама группа A^* и её подгруппа A_0 , могут быть использованы при изучении *n*-арных групп. Одним из примеров такого использования может служить теорема 2.1. Продемонстрируем это также на примере *t*-полуциклических *n*-арных групп, которые мы определим по аналогии с *t*-полуабелевыми *n*-арными группами, отталкиваясь от критерия *t*-полуабелевости *n*-арной группы, сформулированного в теореме 2.1.

Определение 4.1. Пусть $m - 1$ делит $n - 1$. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется *t*-полуциклической, если существуют такие элементы $a_1, \dots, a_{m-1} \in A$, что группа ${}^m A$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Последовательность $a_1 \dots a_{m-1}$ в этом случае называется *порождающей* для *t*-полуциклической *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Так как ${}^2 A = A^*$, то, согласно следствию 3.1, циклические *n*-арные группы – это в точности 2-полуциклические *n*-арные группы.

Так как ${}^n A = A_0$, то полуциклические *n*-арные группы – это в точности *n*-полуциклические *n*-арные группы.

Таким образом, циклические и полуциклические *n*-арные группы являются частными случаями *t*-полуциклических *n*-арных групп при $m = 2$ и $m = n$.

Имеет место

Предложение 4.1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая циклическая *n*-арная группа является *t*-полуциклической;
- 2) всякая *t*-полуциклическая *n*-арная группа является полуциклической;
- 3) всякая *t*-полуциклическая *n*-арная группа является *t*-полуабелевой.

Доказательство. 1) Если $\langle A, [] \rangle$ – циклическая *n*-арная группа, порождённая элементом a , то по теореме 3.1 группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$. Тогда, согласно определению 4.1, $\langle A, [] \rangle$ – *t*-полуциклическая *n*-арная группа, порождённая последовательностью $\underbrace{a \dots a}_{m-1}$.

2) Следует из включения $A_0 \subseteq {}^m A$.

3) Следует из теоремы 2.1. Предложение доказано.

Пример 4.1. Пусть $\langle Z_2, [] \rangle$ – 7-арная группа, производная от циклической группы $Z_2 = \{1, a\}$ второго порядка с порождающим элементом a . Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{1 \dots 1}_i), v_i = \theta_A(a \underbrace{1 \dots 1}_i), i = 1, \dots, 6.$$

Тогда: универсальная обертывающая группа Поста $Z_2^* = \{u_i, v_i \mid i = 1, \dots, 6\}$ имеет порядок 12 и является объединением множеств

$$Z_2^{(i)} = \{u_i, v_i\}, i = 1, \dots, 6;$$

подгруппа ${}^3 Z_2 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6\}$ группы Z_2^* имеет порядок 6 и является объединением множеств $Z_2^{(2)}, Z_2^{(4)}, Z_2^{(6)}$. Так как

$$v_2^2 = u_4, v_2^3 = v_6, v_2^4 = u_2, v_2^5 = v_4, v_2^6 = u_6,$$

то ${}^3 Z_2$ – циклическая группа с порождающим элементом $v_2 = \theta_A(a1)$. Следовательно, $\langle Z_2, [] \rangle$ – 3-полуциклическая 7-арная группа с порождающей последовательностью $a1$.

Так как

$$\underbrace{[1 \dots 1]}_7 = 1, \underbrace{[a \dots a]}_7 = a,$$

то 7-арная группа $\langle Z_2, [] \rangle$ не является циклической.

Пример 4.1 показывает, что в общем случае класс всех *t*-полуциклических *n*-арных групп шире класса всех циклических *n*-арных групп.

Пример 4.2. Пусть $B_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечётных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $\langle B_3, [] \rangle$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе S_3 . Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{(12) \dots (12)}_i), v_i = \theta_A(\underbrace{(13) (12) \dots (12)}_{i-1}),$$

$$w_i = \theta_A(\underbrace{(23) (12) \dots (12)}_{i-1}), i = 1, \dots, 6.$$

Тогда: универсальная обёртывающая группа Поста $B_3^* = \{u_i, v_i, w_i \mid i = 1, \dots, 6\}$ имеет порядок 18 и является объединением множеств $B_3^{(i)} = \{u_i, v_i, w_i\}$, $i = 1, \dots, 6$; подгруппа ${}^3B_3 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6, w_2, w_4, w_6\}$ группы B_3^* имеет порядок 9 и является объединением множеств $B_3^{(2)}$, $B_3^{(4)}$, $B_3^{(6)}$. Так как

$$\begin{aligned} u_2^2 &= u_4, u_2^3 = u_6, u_2^4 = u_2, \\ v_2^2 &= w_4, v_2^3 = u_6, v_2^4 = v_2, \end{aligned}$$

то $\{u_2, u_4, u_6\}$ и $\{v_2, w_4, u_6\}$ – две циклические подгруппы третьего порядка группы 3B_3 , которая по этой причине не является циклической. Следовательно, 7-арная группа $\langle B_3, [] \rangle$ не является 3-полуциклической. При этом $\langle B_3, [] \rangle$ как 7-арная группа простого порядка является полуциклической.

Пример 4.2 показывает, что в общем случае класс всех m -полуциклических n -арных групп уже класса всех полуциклических n -арных групп.

Критерий m -полуабелевости из замечания 2.1 наводит на мысль о существовании аналогичного критерия m -полуциклическости. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 4.1. *n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) m -полуциклической с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ – конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.*

Доказательство. Сразу же заметим, что множества A и $A^{(m-1)}$ равномощны.

Считаем вначале $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ .

Необходимость. Так как $\langle A, [] \rangle$ – m -полуциклическая n -арная группа с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$, то $m-1$ делит $n-1$, а группа ${}^m A$ является циклической, порожденной элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 1) леммы 3.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r = 0, 1, \dots, \gamma-1\}.$$

Для любого $r = 0, 1, \dots, \gamma-1$ имеем

$$\begin{aligned} v^{[0]} &= v, \\ v^{[r]} &= [\underbrace{v \dots v}_{rk+1}]_{k+1} = \\ &= [\underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1}]_{k+1} = \\ &= \theta_A(\underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+1}) = \\ &= \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1} = \\ &= (\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1} = v^{rk+1}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} v^{[0]} &= v, v^{[1]} = v^{k+1}, \\ v^{[2]} &= v^{2k+1}, \dots, v^{[\gamma-1]} = v^{(\gamma-1)k+1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В правых частях равенств из (4.1) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего циклическую группу ${}^m A$. А так как порядки всех степеней в правых частях равенств из (4.1) не превосходят порядка γk группы ${}^m A$, то среди этих степеней нет одинаковых. Но тогда и среди стоящих в левых частях равенств из (4.1) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ также нет одинаковых элементов. Таким образом, множество

$$\begin{aligned} A^{(m-1)} &= \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \dots, v^{(\gamma-1)k+1}\} = \\ &= \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[\gamma-1]}\} \end{aligned}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ является циклической, порожденной элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность. Так как $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ – конечная циклическая $(k+1)$ -арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[\gamma-1]}\},$$

откуда, ввиду (4.1), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \dots, v^{(\gamma-1)k+1}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} v^{i-1} = \{v^j, v^{k+i}, v^{2k+i}, \dots, v^{(\gamma-1)k+i}\}$$

для любого $i = 1, \dots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^k \{v^j, v^{k+i}, v^{2k+i}, \dots, v^{(\gamma-1)k+i}\} = \{v^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \{v^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\}.$$

Следовательно, группа ${}^m A$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle A, [] \rangle$ – конечная m -полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$.

Считаем теперь n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ бесконечной.

Необходимость. Снова ${}^m A$ – циклическая группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 2) леммы 4.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r - \text{целое}\}.$$

Так же, как и в конечном случае, получают равенства

$$v^{[0]} = v, v^{[1]} = v^{k+1}, v^{[2]} = v^{2k+1}, \dots, v^{[r]} = v^{rk+1}, \dots,$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r \geq 0$.

Для целого $r < 0$ полиадическая степень $v^{[r]}$ элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ является решением уравнения $[x \underbrace{v \dots v}_{-rk}]_{k+1} = v$. Тогда последовательно

получаем

$$\begin{aligned} [v^{[r]} \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk}]_{k+1} &= \\ &= \theta_A(a_1 \dots a_{m-1}), \end{aligned}$$

$$v^{[r]} \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk} =$$

$$= \theta_A(a_1 \dots a_{m-1}),$$

$$v^{[r]} = (\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1},$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r < 0$.

Таким образом,

$$v^{[r]} = v^{rk+1}, r - \text{целое.} \quad (4.2)$$

В правых частях равенств из (4.2) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего бесконечную циклическую группу ${}^m A$. Тогда среди стоящих в левых частях равенств из (4.2) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ нет одинаковых. Таким образом, множество

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r - \text{целое}\} = \{v^{[r]} \mid r - \text{целое}\}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ является бесконечной циклической, порождённой элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность Так как $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle -$ бесконечная циклическая $(k+1)$ -арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[r]} \mid r - \text{целое}\},$$

откуда, ввиду (4.2), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r - \text{целое}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} v^{i-1} = \{v^{rk+i} \mid r - \text{целое}\}$$

для любого $i = 1, \dots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^k \{v^{rk+i} \mid r - \text{целое}\} = \{v^s \mid s - \text{целое}\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \{v^s \mid s - \text{целое}\}.$$

Следовательно, бесконечная циклическая группа ${}^m A$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle A, [] \rangle -$ бесконечная t -полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.1 $m = 2$, получим

Следствие 4.1. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) циклической, порожденной элементом a , тогда и только тогда, когда n -арная группа $\langle A', []_n \rangle$ из замечания 0.1 - конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a)$.

Заметим, что следствие 4.1 является также следствием изоморфизма $\varphi: a \rightarrow \theta_A(a)$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ на n -арную группу $\langle A', []_n \rangle$.

Полагая в теореме 4.1 $m = n$, получим

Следствие 4.2. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) полуциклической, порожденной последовательностью $a_1 \dots a_{n-1}$, тогда и только тогда, когда группа $A_0 -$ конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{n-1})$.

Как видим, следствие 4.2 равносильно определению t -полуциклической n -арной группы.

Замечание 4.1. Если полуциклическая n -арная группа порождается последовательностью $\underbrace{a \dots a}_{n-1}$, то по следствию 3.2 она является циклической, порожденной элементом a .

Приведём ещё один критерий t -полуциклическости n -арной группы. Для этого зафиксируем в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$, где $n = k(m-1) + 1$, элементы c_1, \dots, c_{m-2} и определим на A $(k+1)$ -арную операцию $[]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} =$$

$$= [a_1 c_1 \dots c_{m-2} a_2 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}].$$

Проведя соответствующие вычисления (см., например, [2]), можно убедиться в том, что $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle - (k+1)$ -арная группа. Этот результат может быть получен и как следствие изоморфизма из следующей леммы.

Лемма 4.1. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$. Тогда $(k+1)$ -арные группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ и $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Определим отображение $\tau: A^{(m-1)} \rightarrow A$ по правилу

$$\tau: \theta_A(a c_1 \dots c_{m-2}) \rightarrow a.$$

Ясно, что $\tau -$ биекция $A^{(m-1)}$ на A .

Для любых

$$\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}), \dots, \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}) \in A^{(m-1)}$$

имеем

$$\tau([\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}) \dots \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2})]_{k+1}) =$$

$$= \tau(\theta_A([a_1 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}] c_1 \dots c_{m-2})) =$$

$$= [a_1 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}] =$$

$$= [a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} =$$

$$= [\tau(\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2})) \tau(\theta_A(a_2 c_1 \dots c_{m-2})) \dots$$

$$\dots \tau(\theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}))]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}},$$

то есть

$$\tau([\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}) \dots \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2})]_{k+1}) =$$

$$= [\tau(\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2})) \dots$$

$$\dots \tau(\theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}))]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1 и лемма 4.1 позволяют сформулировать следующий критерий t -полуциклическости n -арной группы.

Теорема 4.2. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle - t$ -полуциклическая с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$, то для любых $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$ -арная группа $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle -$ циклическая с порождающим элементом a , который однозначно

определяется из условия

$$\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_A(ac_1 \dots c_{m-2});$$

2) если для некоторых $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$ -арная группа $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , то $\langle A, [] \rangle$ – m -полуциклическая с порождающей последовательностью $ac_1 \dots c_{m-2}$.

При $m=2$ оба утверждения теоремы 4.2 тривиальны.

Полагая в теореме 4.2 $m=n$, получим

Следствие 4.3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – полуциклическая с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{n-1}$, то для любых $c_1, \dots, c_{n-2} \in A$ группа $\langle A, []_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , который однозначно определяется из условия $\theta_A(a_1 \dots a_{n-1}) = \theta_A(ac_1 \dots c_{n-2})$;

2) если для некоторых $c_1, \dots, c_{n-2} \in A$ группа $\langle A, []_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , то n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ – полуциклическая с порождающей последовательностью $ac_1 \dots c_{n-2}$.

Замечание 4.2. Для обозначения операции $[]_{2, c_1 \dots c_{n-2}}$ используется также любой из символов \odot или \circ_c из теоремы Поста – Глускина – Хоссу [2], [9], где $cc_1 \dots c_{n-2}$ – нейтральная последовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
3. Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // XI Междунар конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тез. докл., Саратов, 10–16 сент. 2012. – С. 39–40.
4. Артамонов, В.А. Свободные n -группы / В.А. Артамонов // Мат. заметки. – 1970. – Т. 8, № 4. – С. 499–507.
5. Артамонов, В.А. О шрайеровых многообразиях n -групп и n -полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1979. – Вып. 5. – С. 193–202.
6. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
7. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
8. Щучкин, Н.А. Полуциклические n -арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 3 (54). – С. 186–194.
9. Гальмак, А.М. О теореме Поста – Глускина – Хоссу / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 10.07.13.